OM

ANALYSIS SITUS

OCH

ALGEBRAISKA FUNKTIONER

AF FLERA OBEROENDE VARIABLER

AKADEMISK AFHANDLING

AF

TORSTEN MONTÉN

STOCKHOLM 1901
IDUNS KUNGL. HOFBOKTR. FILIAL

11555.

OM
ANALYSIS SITUS
OCH
ALGEBRAISKA FUNKTIONER
AF FLERA OBEROENDE VARIABLER

AKADEMISK AFHANDLING

SOM MED TILLSTÅND AF

FILOSOFISKA FAKULTETENS I UPPSALA MATEMATISK-NATURVETENSKAPLIGA SEKTION

FÖR VINNANDE AF FILOSOFIE DOKTORSGRAD

TILL OFFENTLIG GRANSKNING FRAMSTÄLLES

AF

TORSTEN MONTÉN

FIL. LIC. AF VESTGÖTA NATION

Å LÄROSALEN N:o XI

ONSDAGEN DEN 29 MAJ 1901, KL. 10 F. M.

ACAD.
LUGD BAT.
BIBL.

STOCKHOLM 1901
IDUNS KUNGL. HOFBOKTR. FILIAL

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548928_0096

Förord.

Föreliggande afhandling utgör ett försök att med användning af några allmänna satser ur teorien för Analysis Situs generalisera den klassiska teorien för algebraiska funktioner af en oberoende variabel särskildt med afseende på frågan om antalet integraler af första slaget, som tillhöra en viss klass af algebraiska bilder, nämligen sådana, hvilkas koordinater kunna uttryckas genom $2n$-periodiska funktioner af n parametrar.

Afhandlingens första del har ägnats åt en kort historisk öfversikt och sammanställning af de viktigaste satserna inom teorien för Analysis Situs och de algebraiska funktionerna.

Andra delen af afhandlingen behandlar den först omnämnda speciella klassen af algebraiska bilder och en undersökning om antalet integraler af första slaget, som tillhöra densamma.

I.

Några historiska data ur utvecklingen af Analysis Situs och de algebraiska funktionernas teori.

Namnet Analysis Situs och de första undersökningarne inom denna teori härstamma från Riemann[1], som i anslutning till sin numera klassiska teori för de algebraiska funktionerna af en oberoende variabel, äfven gjort en början till dessas generalisering till flera variabler genom att i teorien för n-dimensionala varieteter införa definitioner analoga med dem, som han infört i teorien för algebraiska funktioner af en oberoende variabel. Sålunda definierar han n-dimensionala varieteters begränsning, deras konnexion i olika dimensioner, begreppet coupurer af ett högre antal dimensioner m. m.

Oberoende af Riemann har Betti i sin afhandling[2]: Sopra gli spazia di un numero qualunque di dimensioni, dels gifvit samma definitioner som Riemann, dels i analogi med den af Riemann och från rent analytisk synpunkt af Weierstrass införda rangen hos algebraiska kurvor (bilder), generaliserat detta begrepp till varieteter af ett högre antal

[1] Riemann: Gesammelte Werke: Fragment aus der Analysis Situs.

[2] Annali di Matematica, Serie II, tome IV.

dimensioner, i det att han infört de efter honom benämnda Betti'ska talen och därvid visat följande inom teorien för Analysis Situs fundamentala teorem:

För att medelst enkelt sammanhängande coupurer göra en ändlig n-dimensional varietet enkelt sammanhängande är nödvändigt och tillräckligt att göra ett visst bestämdt antal p_{n-1} liniära, p_{n-2} tvådimensionala, p_{n-3} tredimensionala, ... p_1-$(n-1)$-dimensionala coupurer, där p_1+1, p_2+1, ... $p_{n-1}+1$ äro de respektive konnexionsordningarna af 1sta 2dra ..... $(n-1)$sta dimensionen.

I modernare arbeten af Poincaré och Picard hafva sedan Bettis tal p_1+1, p_2+1, ... $p_{n-1}+1$ ersatts af p_1, p_2, ... p_{n-1}, som numera äro de vanliga beteckningarne för konnexionsordningarne af n-dimensionala varieteter.

Betti har äfven i sin afhandling sysselsatt sig med studiet af multipelintegraler, utsträckta öfver n-dimensionala varieteter, men det blef dock, som vi skola se, Poincaré förbehållet att generellt klargöra denna fråga.

I anslutning till Betti har Poincaré i sin afhandling[1]: »Analysis Situs» återupptagit studiet af den allmänna teorien, däri han dels i många punkter preciserat Bettis resultat och genom införandet af flera nya begrepp gifvit en åskådligare uppfattning af denna teori, dels påvisat den stora skillnad, som uppträder, när man begränsar sig till tvådimensionala varieteter eller då man söker generalisera till flera variabler.

Poincarés resultat hafva sedan sammanfattats af Picard och Simart i: Théorie des Fonctions Algébriques de deux variables indépendentes, hvilket arbete för närvarande från Riemannsk ståndpunkt är det fundamentala inom teorien för algebraiska funktioner af två variabler.

[1] Journal de l'école polytechnique 1895.

Jag vill i största korthet redogöra för de viktigaste inom teorien för Analysis Situs förekommande definitioner och satser, som närmast beröra algebraiska funktionernas teori.

Betrakta följande system af likheter och olikheter

$$(1)\quad \begin{cases} F_1(x_1\,,\ x_2\,,\ \ldots\ldots\ x_n) = 0 & \varphi_1(x_1\,,\ x_2\,,\ \ldots\ldots\ x_n) > 0 \\ F_2(x_1\,,\ x_2\,,\ \ldots\ldots\ x_n) = 0 & \varphi_2(x_1\,,\ x_2\,,\ \ldots\ldots\ x_n) > 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_p(x_1\,,\ x_2\,,\ \ldots\ldots\ x_n) = 0 & \varphi_q(x_1\,,\ x_2\,,\ \ldots\ldots\ x_n) > 0 \end{cases}$$

där F och φ äro entydiga, kontinuerliga och *analytiska* funktioner af de ingående reella variablerna $(x_1\,,\ x_2\,,\ \ldots\ldots\ x_n)$ och där funktionaldeterminanterna af p^{te} ordningen i matrixen

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}\,,\ \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\,,\ \ldots\ldots\,,\ \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial F_p}{\partial x_1}\,,\ \frac{\partial F_p}{\partial x_2}\,,\ \ldots\ldots\,,\ \frac{\partial F_p}{\partial x_n} \end{matrix} \right\|$$

ej alla samtidigt försvinna.

Under dessa villkor definiera (1) en $(n-p)$-dimensional varietet.

Generellare definieras en m-dimensional varietet genom parametrisk representation sålunda:

$$(2)\quad \begin{cases} x_1 = \Theta_1(y_1\,,\ y_2\,,\ \ldots\ldots\ y_m) \\ x_2 = \Theta_2(y_1\,,\ y_2\,,\ \ldots\ldots\ y_m) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \Theta_n(y_1\,,\ y_2\,,\ \ldots\ldots\ y_m) \end{cases}$$

tillsammans med ett visst antal olikheter af formen

$$\psi(y_1\,,\ y_2\,,\ \ldots\ldots\ y_m) > 0.$$

Funktionerna Θ_λ äro ändliga, kontinuerliga och analytiska funktioner af parametrarne y_1, y_2, ... y_m och sådana, att funktionaldeterminanterna af m af funktionerna Θ_λ ej samtidigt bli noll.

En varietet säges vara kontinuerlig, om det är möjligt att genom kontinuerlig variation af koordinaterna x_1, x_2, ... x_n, alltjämt satisfierande (1) komma från en godtycklig punkt till en annan, hvilken som helst inom varieteten.

En varietet är ändlig, om alla dess punkter satisfiera villkoret

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots + x_n^2 < k^2$$

där k är en gifven konstant.

Tvänne varieteter, definierade genom den parametriska representationen (2), sägas vara hvarandras analytiska fortsättning, om funktionerna Θ hos den ena varieteten äro analytiska fortsättningar af dessa funktioner hos den andra, och där konvergensområdet definieras af olikheterna

$$\psi(y_1, y_2, \ldots\ldots y_m) > 0$$

Begränsningen till en varietet S_{n-p} är sammanfattningen af de punkter, som satisfiera följande system af likheter och olikheter

$$\begin{aligned} F_i &= 0 \qquad i = 1 . 2 \ldots\ldots p \\ \varphi_k &= 0 \qquad k, \lambda \text{ något af talen } 1 . 2 \ldots\ldots q \\ \varphi_\lambda &> 0 \qquad \lambda \neq k \end{aligned}$$

eller enligt definitionen på varieteters analytiska fortsättning utgöres begränsningen till en varietet af en annan varietet, som hindrar den förras analytiska fortsättning, eller m. a. o.

begränsningen till en varietet är sammanfattningen af de punkter, som satisfiera likheterna $\psi(y_1, y_2 \ldots\ldots y_m) = 0$, där ψ äro venstra membra i ofvanstående olikheter.

Existerar däremot ej något värdesystem på $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$, som satisfiera dessa likheter och olikheter, säges varieteten vara obegränsad.

Om en varietet är på en gång ändlig, kontinuerlig och obegränsad, säges den vara sluten.

Tvänne varieteter sägas vara homeomorfa, om hvarje ställe i den ena biuniformt korresponderas af hvarje ställe i den andra, och hvarje varietet innehållen i den ena äfvenledes biuniformt korresponderas af en varietet af samma antal dimensioner inom den andra.

I likhet med de tvådimensionala varieteterna (ytorna) kan det fall inträffa, att en n-dimensional varietet skär sig själf eller helt och hållet täcker sig själf. Denna senare art af varieteter kallar Picard »variétés doubles», Poincaré »variétés unilatéres».

Picard har för varieteter af dessa båda slag gifvit följande definition:

Antag en $(n-m)$-dimensional varietet definierad genom relationerna

$$\begin{array}{ll} F_1(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n) = 0 & \varphi_1(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n) > 0 \\ F_2(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n) = 0 & \varphi_2(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n) > 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_m(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n) = 0 & \varphi_q(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n) > 0 \end{array}$$

där funktionerna F äro holomorfa i omgifningen till en punkt $A(x_1^0, x_2^0, \ldots\ldots x_n^0)$ ej tillhörande varietetens begränsning.

Till dessa ekvationer $F_\lambda = 0$ foga vi $n-m-1$ homogena, definita, kvadratiska former af $x_1 - x_1^0, \ldots\ldots x_n - x_n^0$, som äro liniärt oberoende.

Låt dessa vara

$$\lambda_1(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \ldots\ldots\ x_n)\ \ldots\ldots\ \lambda_{n-m-1}(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \ldots\ldots\ x_n)$$

och tillordna våra ofvanstående ekvationer de $(n-m-1)$-ekvationerna

$$\lambda_i(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \ldots\ldots\ x_n) = \varepsilon_i \qquad i = 1\ .\ 2\ \ldots\ldots\ n-m-1$$

där ε_i äro positiva små kvantiteter.

Vi hafva då $n-1$ ekvationer, som inom varieteten S_{n-m} definiera omkring punkten A en liten sluten kurva C, hvars positiva riktning är från början fixerad. Genom att nu analytiskt fortsätta den parametriska representationen af ekvationerna $F_\lambda = 0$ och $\lambda_i = \varepsilon_i$ kan jag anse punkten A rörlig, under rörelsen alltjämt omgifven af kurvan C, som deformerar sig.

Antag nu, att kurvan C, när A återkommer till sin utgångspunkt efter att hafva följt en väg inom S_{n-m}, har samma riktning som förut. I detta fall säges varieteten vara *enkel*. Återigen är det möjligt att kurvan C, efter att A beskrifvit vissa vägar icke har samma riktning som den ursprungliga; i detta senare fall säges varieteten vara *dubbel*.

Betrakta en enkel $(n-m)$-dimensional varietet, definierad genom den parametriska representationen, och den till denna på ofvannämnda sätt tillordnade kurvan C, hvars riktning, som förut är från början fixerad, och låt genom parametrarnes kontinuerliga variation varieteten beskrifvas.

Fixerar jag nu initalriktningen hos kurvan C åt motsatt håll, så säges varieteten beskrifvas i motsatt led eller vi hafva att göra med S_{n-m} och *dess motsatta varietet*.

I två- och tredimensionala varieteter är denna fixering tydligen densamma, som att hos kurvor och ytor skilja mellan den yttre och inre sidan.

Om jag har en n-dimensional varietet S_n och betraktar en i densamma innehållen sluten m-dimensional varietet S_m, så kan man med undantag af det fall då $m = n - 1$ genom S_m lägga ett oändligt antal $(m + 1)$-dimensionala varieteter, som innehållas i S_n. Varieteten S_m säges till S_n bilda en *fullständig begränsning*, om det finnes någon $(m + 1)$-dimensional varietet S_{m+1} innehållen i S_n, som fullständigt begränsas af S_m; S_m kan då ej genom kontinuerlig deformation reduceras till en varietet af ett mindre antal dimensioner. Begränsas däremot S_{m+1} ej fullständigt af S_m, så kan ej S_m bilda fullständig begränsning till S_n.

Antag vidare en inom den n-dimensionala varieteten S_n belägen grupp af m-dimensionala varieteter

$$S_m^{(1)}, S_m^{(2)}; \ldots\ldots S_m^{(\lambda)}$$

så beskaffade, att de hvar för sig ej kunna bilda begränsning, så säges denna grupp bilda eller icke bilda begränsning, allteftersom man kan eller icke kan finna inom S_n en sluten varietet S_{m+1}, som fullständigt begränsas af gruppen.

Om jag har två m-dimensionala variteter S_m och S_m^1, så beskaffade, att de likheter och olikheter, som definiera den ena på en oändligt liten kvantitet när, differera från de likheter och olikheter, som definiera den andra, så sägas S_m och S_m^1 vara i hvarandras omedelbara omgifning.

Vi vilja nu fullständigt definiera konnexionsordningarne hos n-dimensionala varieteter.

Betrakta inom varieteten S_n $p_m - 1$ slutna varieteter

$$S_m^{(1)}, S_m^{(2)} \ldots\ldots S_m^{(p_m - 1)}$$

som vi antaga hafva följande egenskaper; de kunna ej hvar för sig bilda begränsning, ej heller kunna de genom kontinuerlig deformation öfvergå i hvarandra; vidare är det ej möjligt att genom k_1 varieteter i omgifningen af $S_m^{(1)}$, k_2 varieteter i omgifningen af $S_m^{(2)}$ ..... k_{p_m-1} varieteter i omgifningen af $S_m^{(p_m-1)}$ lägga en varietet S_{m+1}, som fullständigt begränsas af dessa $k_1 + k_2 + \ldots\ldots + k_{p_m-1}$ varieteter.

Vi säga då, att konnexionsordningen hos S_n relativt m-dimensionala coupurer är p_m, om, sedan vi funnit $p_m - 1$ varieteter af ofvannämnda slag inom S_n, det är möjligt att till dessa varieteter foga en p_m^{te} varietet af m dimensioner inom S_n och bestämma talen $k_1 k_2 \ldots k_{p_m-1}$ så, att sammanfattningen af denna varietet och de k_1 varieteterna i omgifningen af $S_m^{(1)}$, k_2 varieteterna i omgifningen af $S_m^{(2)}$ ..... k_{p_m-1} varieteterna i omgifningen af $S_m^{(p_m-1)}$ bilda fullständig begränsning. Talet p_m är det Betti'ska talet relativt m-dimensionala coupurer.

Poincaré har i allmänhet och Picard speciellt för linjära coupurer ($m = 1$) uppvisat en egenskap hos de till en sluten n-dimensional varietet hörande Betti'ska talen nämligen:

De af de till en sluten n-dimensional varietet hörande Betti-ska talen p_1, p_2 ..... p_{n-1}, som äro ekvidistanta från de yttersta äro lika stora, så att

$$p_m = p_{n-m} \qquad m = 1 . 2 \ldots\ldots (n-1) .$$

Detta är i största korthet några af de viktigaste definitionerna och satserna inom teorien för Analysis Situs, som närmast beröra teorien för algebraiska funktioner af flera oberoende variabler, sådana de blifvit framställda af Poincaré och Picard (loc. cit).

Vi veta hvilken stor roll, som de Abel'ska integralerna spela inom teorien för algebraiska funktioner af en oberoende variabel; det ligger då nära till hands att inom teorien för algebraiska funktioner af flera variabler införa multipelintegraler, analoga med de Abel'ska integralerna.

Detta har dock ej varit möjligt, förrän Poincaré[1] klart definierat multipelintegralernas utsträckning öfver varieteter af ett högre antal dimensioner än den första och angifvit integrabilitetsvillkoren d. v. s. de nödvändiga och tillräckliga villkoren för att integralernas värden ej förändras, då man kontinuerligt deformerar den varietet, öfver hvilken integralerna äro utsträckta.

Poincarés nämnda definition är följande:

Med den m-faldiga multipelintegralen

$$\int\int \cdots \int \sum_{\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_m}^{(m)} (X_{\nu_1}, X_{\nu_2} \ldots X_{\nu_m}) dx_{\nu_1} dx_{\nu_2} \ldots dx_{\nu_m}$$

där $\nu_1, \nu_2 \ldots \nu_m$ under villkoret $\nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_m$ genomlöpa talföljden $1 . 2 \ldots n$ och där $(X_{\nu_1}, X_{\nu_2}, \ldots X_{\nu_m})$ är en kontinuerlig funktion af variablerna $x_1, x_2, \ldots x_n$, tagen öfver varieteten, definierad genom den parametriska representationen:

$$x_1 = \varphi_1(u_1, u_2 \ldots u_m)$$
$$x_2 = \varphi_2(u_1, u_2 \ldots u_m)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = \varphi_n(u_1, u_2 \ldots u_m)$$

[1] Sur les résidus des integrales doubles, Acta Mathematica, bd. 9.

förstå vi integralen

$$\int\int\cdots\int^{(m)}\left\{\sum_{\nu_1,\nu_2,\ldots\nu_m}(X_{\nu_1},\ X_{\nu_2}\ldots\ldots X_{\nu_m})\frac{(\partial x_{\nu_1}\ldots\ldots x_{\nu_m})}{(\partial u_1\ldots\ldots u_m)}\right\}du_1du_2\ldots\ldots du_m$$

utsträckt öfver varieteten, definierad genom ofvanstående ekvationer, och där $\frac{\partial(x_{\nu_1}\ldots\ldots x_{\nu_m})}{\partial(u_1\ldots\ldots u_m)}\neq 0$ är en af funktionaldeterminanterna i matrixen

$$\left\|\begin{array}{l}\frac{\partial x_1}{\partial u_1},\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1},\ \ldots\ldots\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1}\\ \frac{\partial x_1}{\partial u_2},\ \frac{\partial x_2}{\partial u_2},\ \ldots\ldots\ \frac{\partial x_n}{\partial u_2}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \frac{\partial x_1}{\partial u_m},\ \frac{\partial x_2}{\partial u_m},\ \ldots\ldots\ \frac{\partial x_n}{\partial u_m}\end{array}\right\|$$

Integrabilitetsvillkoren hafva följande utseende:

$$\frac{\partial(X_{\nu_1},\ X_{\nu_2}\ldots\ldots X_{\nu_m})}{\partial x_{\nu_m+1}}\ \pm\ \frac{\partial(X_{\nu_2},\ X_{\nu_3}\ldots\ldots X_{\nu_m+1}}{\partial x_{\nu}}\ \pm\ \ldots\ldots\ \pm$$
$$\pm\ \frac{\partial(X_{\nu_m+1},\ X_{\nu_1}\ldots\ldots X_{\nu_m-1})}{\partial x_{\nu_m}}=0$$

där plustecknet öfverallt skall användas, om m är ett jämnt tal; däremot skola alternerande tecken användas, om m är udda. Antalet af dessa villkor är lika med det antal olika sätt, man af n storheter kan kombinera grupper om ν_{m+1} storheter.

Detta Poincarés resultat har af honom själf och Picard användts för att inom multipelintegralernas teori införa perioderna till en sådan integral i analogi med periodicitetsmodylerna hos Abel'ska integralerna. Definitionen på perioderna till en multipelintegral är följande:

Antag en $(p-n)$-dimensional varietet definierad genom

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, \ldots\ldots x_p) &= 0 \qquad \varphi_1(x_1, x_2, \ldots\ldots x_p) \gtrless 0 \\ F_2(x_1, x_2, \ldots\ldots x_p) &= 0 \qquad \varphi_2(x_1, x_2, \ldots\ldots x_p) \gtrless 0 \quad p \geq n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n(x_1, x_2, \ldots\ldots x_p) &= 0 \qquad \varphi_q(x_1, x_2, \ldots\ldots x_p) \gtrless 0 \end{aligned}$$

Betrakta sedan den m-faldiga integralen:

$$\int\int \ldots\ldots \int^{(m)} \Sigma X_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m} dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \ldots\ldots dx_{\alpha_m}$$

där $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ under villkoret $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots \alpha_m$ genomlöpa talföljden $1 \,.\, 2 \ldots\ldots n$. Vidare äro $X_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$ entydiga kontinuerliga funktioner af $x_1 \ldots\ldots x_p$ och integrabilitetsvillkoren uppfyllda, då man betraktar $x_{n+1} \ldots\ldots x_p$ som funktioner af $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$. Vi utsträcka integralen öfver $p_m - 1$ slutna m-dimensionala varieteter, som ej kunna bilda begränsning till en $(m+1)$-dimensional varietet. Betecknas integralens värden längs dessa varieteter med Ω_1, $\Omega_2 \ldots\ldots \Omega_{p_m} - 1$, så existerar ej mellan dessa kvantiteter någon liniär relation med konstanta koefficienter. Däremot om vi tillordna en p_m^{te} varietet så kunna dessa p_m varieteter bilda fullständig gräns för en $(m+1)$-dimensional varietet och mellan $\Omega_1 \Omega_2 \ldots\ldots \Omega_{p_m}$ existerar en liniär relation

$$k_1 \Omega_1 + k_2 \Omega_2 + \ldots\ldots + k_{p_m} \Omega_{p_m} = 0$$

där k_1, $k_2 \ldots\ldots, k_{p_m}$ äro hela positiva eller negativa tal.

Kvantiteterna $\Omega_1, \Omega_2 \ldots\ldots \Omega_{p_m} - 1$ äro då de distinkta perioderna till integralen, tagen längs slutna m-dimensionala coupurer.

Genom dessa resultat är det nu möjligt att för multipelintegralerna öfver algebraiska differentialuttryck af flera variabler genomföra en teori, som för algebraiska funktioner af flera variabler spelar samma roll, som de Abel'ska integralerna i förhållande till teorien för algebraiska kurvor.

En klassificiering af de till en n-dimensional varietet hörande multipelintegralerna har äfven genomförts i analogi med klassificeringen af de Abel'ska integralerna.

Särskildt för algebraiska ytorna har teorien för de till dessa hörande kurvilinära och dubbelintegralerna blifvit studerad af Noether [1] och Picard [2], hvarvid studiet af sådana af första slaget, d. v. s. sådana som i omgifningen af hvarje punkt på den algebraiska ytan hafva ändliga värden, mest tagit uppmärksamheten i anspråk.

Picard har uppvisat ett sammanhang mellan tvänne till en algebraisk yta hörande kurviliniära integraler af första slaget sålunda:

Om de till algebraiska ytan $f(x, y, z) = 0$ hörande kurvilinära integralerna

$$\int P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy$$

$$\int P_1(x, y, z)dx + Q_1(x, y, z)dy$$

där P och Q äro rationella funktioner af x, y, z äro af första slaget, så är äfven dubbelintegralen

$$\int\int (PQ_1 - P_1Q)dxdy$$

af första slaget.

Denna sats har af Grönvall [3] blifvit generaliserad till integraler öfver differentialuttryck af flera variabler sålunda:

Om jag har en r-faldig och en s-faldig multipelintegral af första slaget

$$I_r = \int\int \ldots\ldots \int \sum_{\mu_1 \ldots \mu_r}^{(r)} A_{\mu_1\mu_2 \ldots \mu_r} dx_{\mu_1} \ldots\ldots dx_{\mu_r}$$

---

[1] Math. Annalen, Bd. II—XI.

[2] Journal de Mathématiques 1885, 1886, 1889 eller Picard et Simart

[3] Öfversikt af K. Sv. Vetenskapsakad. förh. 1896.

och

$$I_s = \int\int \ldots\ldots \int \sum_{\mu_1 \ldots \mu_s}^{(s)} A'_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_s} dx_{\mu_1} \ldots\ldots dx_{\mu_s}$$

där POINCARÉS integrabilitetsvillkor äro uppfyllda, och där $A_{\mu_1 \ldots \mu_r}$, $A_{\mu_1 \ldots \mu_s}$ äro rationella funktioner af $x_1 x_2 \ldots\ldots x_n$ och $\mu_1 \ldots\ldots \mu_r$, $\mu_1 \ldots\ldots \mu_s$ under förutsättningen $\mu_1 < \mu_2 < \ldots\ldots < \mu_r$ för den första integralen samt $\mu_1 < \mu_2 < \ldots\ldots < \mu_s$ för den andra genomlöpa talföljden $1 \, . \, 2 \ldots\ldots n$, så är det för det fall att $r + s \leq n$ alltid möjligt att genom föreskriften

$$A_{\mu_1 \ldots \mu_{r+s}} = \Sigma \pm A_{\lambda_1 \ldots \lambda_r} A'_{\lambda_{r+1} \ldots \lambda_{r+s}}$$

bilda en $r + s$-faldig integral

$$\int\int \ldots\ldots \int \sum_{\mu_1 \ldots \mu_{r+s}}^{(r+s)} A_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_{r+s}} dx_{u_1} dx_{\mu_2} \ldots\ldots dx_{u_{r+s}}$$

af första slaget där $\lambda_1 \ldots\ldots \lambda_{r+s}$ under villkoren $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots\ldots < \lambda_r$, $\lambda_{r+1} < \lambda_{r+2} < \ldots\ldots < \lambda_{r+s}$ genomlöpa värdeföljden $\mu_1 \ldots\ldots \mu_{r+s}$, och där $+$ eller alternerande tecken skola användas allteftersom antalet kombinationer $(\lambda_1 \ldots \lambda_{r+s})$ af storheterna $\mu_1, \mu_2 \ldots\ldots \mu_{r+s}$ är jämnt eller udda.

Den ojämförligt viktigaste och svåraste frågan inom teorien för algebraiska funktioner af flera variabler är naturligtvis studiet af deras singulariteter. Reduktionen af singulariteterna hos de algebraiska ytorna hafva varit föremål för undersökningar af flera forskare såsom ERLANGEN, NOETHER,[1] SEGRE,[2] DEL PEZZO,[3] hvilka alla vid studiet af singularite-

[1] NOETHER: Göttinger Nachrichten 1871. Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1888.

[2] SEGRE: Sulla scomposizioni dei punti singolari delle superficie algebriche. (Annali di Mathematica, Serie II. tomo XXV.)

[3] DEL PEZZO: Intorno ai punti singolari delle superficie algebriche. (Societé Math. de Palerme 1892.)

Anm. DEL PEZZOS afhandling har dock ej stått till min disposition.

terna betjänat sig af metoder analoga med dem, som NOETHER användt vid reduktionen af singulariteterna hos algebraiska kurvor.

I ett nytt skede har denna fråga inträdt genom PICARDS[1] undersökningar, i det att han visat, att en algebraisk yta hvilken som helst kan fås att birationellt korresponderas af en i det femdimensionala rummet belägen yta, som är fullständigt fri från singulariteter.

Från WEIERSTRASSISK ståndpunkt, nämligen att med rent analytiska hjälpmedel studera algebraiska funktionernas singulariteter, har KOBB[2] från en speciell synpunkt i analogi med WEIERSTRASS' teori för algebraiska bilder af en oberoende variabel sökt att analytiskt framställa omgifningen till ett godtyckligt ställe i en algebraisk bild genom potensserier af parametrar; han har för denna analytiska representation bevisat följande sats.

Omgifningen till ett ställe $a_1, a_1 \ldots\ldots a_n$ inom algebraiska bilden

$$f(x, x_1, x_2 \ldots\ldots x_n) = 0$$

definierad genom $|x - a| < \delta, |x_1 - a_1| < \delta \ldots |x_n - a_n| < \delta$, kan framställas genom ett ändligt antal potensserier af formen

$$x - a = \mathfrak{P}(t_1 \ldots\ldots t_n)$$
$$x_1 - a_1 = \mathfrak{P}_1(t_1 \ldots\ldots t_n)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n - a_n = \mathfrak{P}_n(t_1 \ldots\ldots t_n)$$

Emellertid är här att märka, att vid denna undersökning ej har tagits hänsyn till den stora skillnad, som i fråga om de kritiska punkternas frekvens förefinnes mellan de

[1] PICARD et SIMART.

[2] Journal de Mathématiques 1892.

algebraiska kurvorna och algebraiska bilder af två eller flera oberoende variabler, i det att hos de förra de kritiska punkterna förekomma isolerade och till ett ändligt antal, under det att hos de senare dessa punkter utgöras af algebraiska kurvor eller af varieteter af ett högre antal dimensioner.

Det har först lyckats HENSEL[1] att för algebraiska ytorna genom en ny, aritmetisk metod lösa denna viktiga fråga, hvilken undersökning han säger sig sedermera skola generalisera till flera variabler.

HENSELS undersökning resulterar i följande teorem:

Jag har en algebraisk funktion z af x och y, definierad genom den algebraiska bilden $f(x, y, z) = 0$, där f är en irreduktibel hel rationell funktion af z med rationella koefficienter i x och y, och undersöker z i omgifningen af en gren till en regulär eller kritisk kurva, gående genom en punkt (α_0, β_0), hvilken gren ju i allmänhet kan analytiskt framställas genom serieutvecklingen

$$y = y_0(x \mid \alpha_0) = \beta_0 + \beta_1(x - \alpha_0)^{\frac{1}{a}} + \beta_2(x - \alpha_0)^{\frac{2}{a}} + \ldots\ldots\ldots$$

Då kunna de n värdena på z, z_1, z_2, ... z_n i omgifningen till $x = \alpha_0$, $y = y_0(x \mid \alpha_0)$ framställas genom algebraiska potensserier af formen

$$\mathfrak{P}_0\left((x - \alpha_0)^{\frac{1}{a}}\right) + \mathfrak{P}_1\left((x - \alpha_0^{\frac{1}{a}}\right)\left(y - y_0(x \mid \alpha_0)\right) +$$

$$+ \mathfrak{P}_2\left((x - \alpha)^{\frac{1}{a}}\right)\left((y - y_0(x \mid \alpha_0)\right)^2 + \ldots\ldots$$

hvarest $\mathfrak{P}_0$, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ ..... äro potensserier, fortskridande efter hela potenser af $(x - \alpha_0)^{\frac{1}{a}}$; dessa serier konvergera inom en

[1] Über eine neue Theorie der algebraischen Functionen zweier Variabeln. Acta Mathematica 23, 1900.

viss omgifning till kurvgrenen $y = y_0(x \mid \alpha_0)$, gående genom punkten (α_0 , β_0).

En af de frågor, som vid studiet af singulariteterna hos algebraiska funktioner, såväl i den Riemann'ska som i den Weierstrassiska teorien, är de algebraiska bildernas birationella transformationer i hvarandra och särskildt frågan om hvilka algebraiska bilder, som birationellt kunna transformeras i sig själfva.

För de algebraiska bilderna af en oberoende variabel har Schwarz[1] visat att de algebraiska bilder, som birationellt kunna transformeras i sig själfva medelst transformationer innehållande en parameter, äro antingen af rangen noll eller ett.

Enligt teorien för algebraiska kurvor veta vi äfven, att hos kurvor af rangen noll kunna koordinaterna uttryckas medelst rationella funktioner af en parameter (de unikursala kurvorna) och hos kurvor af rangen ett genom dubbelperiodiska funktioner af en parameter.

Picard[2] har sedan för algebraiska ytorna genom en analog bevisföring med Schwarz' visat en liknande sats för algebraiska ytorna med tillhjälp af det af Noether först klargjorda rangbegreppet för algebraiska ytorna.

---

[1] Se Picard: Traité d'Analyse tome II.

[2] Journal de Mathématiques 1889.

II.

Om algebraiska bilder, hvilkas koordinater äro $2n$-periodiska funktioner af parametrar.

Med stöd af några af nu anförda definitioner och satser vill jag nu bevisa följande teorem:

»Om x är en algebraisk funktion af $x_1 \ldots\ldots x_n$, definierad genom den algebraiska bilden

$$(1) \quad f(x, x_1, x_2, \ldots\ldots x_n) = 0$$

så beskaffad, att i hvarje ställe af densamma koordinaterna $x, x_1, \ldots\ldots x_n$ låta uttrycka sig genom $2n$-periodiska funktioner af n-parametrar $u_1, u_2, \ldots\ldots\ldots u_n$ genom ekvationerna:

$$(2) \quad \begin{cases} x = F(u_1, u_2, \ldots\ldots u_n) \\ x_1 = F_1(u_1, u_2, \ldots\ldots u_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = F_n(u_1, u_2, \ldots\ldots u_n) \end{cases}$$

så äger den algebraiska bilden (1) n och endast n liniärt oberoende kurviliniära integraler af första slaget.»

För att bevisa detta teorem åberopa vi en sats[1] från teorien för de $2n$-periodiska funktionerna.

[1] Wirtinger: Zur Theorie de $2n$-fach periodischen Funktionen. Monatshefte für Mathematik und Physik 1895.

»För existensen af funktioner af rationel karakter med det primitiva periodsystemet (α)

$$(\alpha)\quad \begin{cases} 2\omega_{11} \ldots\ldots\ldots\ldots 2\omega_{n,1} \\ 2\omega_{12} \ldots\ldots\ldots\ldots 2\omega_{n,2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2\omega_{1,2n} \ldots\ldots\ldots\ldots 2\omega_{n,2n} \end{cases}$$

äro följande villkor nödvändiga och tillräckliga

a) för $\lambda, \mu = 1 . 2 \ldots\ldots n$ äger relationen

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{2n} C_{\alpha\beta}\omega_{\lambda\alpha}\omega_{\mu\beta} = 0 \text{ rum, där } C_{\alpha,\beta} = -C_{\beta,\alpha} \quad (\alpha \neq \beta)$$

b) Om vi sätta $\omega_{\lambda\alpha} = \eta_{\lambda\alpha} + i\bar{\eta}_{\lambda\alpha}$ $(\mid \eta_{\lambda,\alpha} \mid \neq 0)$

så är

$$\sum_{\alpha,\beta} C_{\alpha\beta}\eta_{\lambda\alpha}\bar{\eta}_{\mu\beta} > 0 \text{ för } \lambda, \mu = 1 . 2 \ldots\ldots n$$

Under dessa förutsättningar existera n funktioner af rationel karakter $f_1(u_1 \ldots\ldots u_n) \ldots\ldots f_n(u_1 \ldots\ldots u_n)$, hvilkas funktionaldeterminant är skild från noll, och hvilka hafva periodsystemet (α).

Vidare är det möjligt att finna en annan $2n$-periodisk funktion $f_{n+1}(u_1 \ldots\ldots u_n)$, sådan att hvarje funktion af rationel karakter $\Phi(u_1 \ldots\ldots u_n)$, som har periodsystemet (α) kan rationellt uttryckas genom

$$\Phi(u_1 \ldots\ldots u_n) = R(f_1, \ldots\ldots f_{n+1})$$

där mellan $f_1, \ldots\ldots f_{n+1}$ består en algebraisk likhet

$$G(f_1, \ldots\ldots f_{n+1}) = 0 .$$

Återgå vi nu till beviset för vår uppställda sats, så kan detta utföras sålunda:

Ur (2) erhålles

$$(3)\quad \begin{cases} dx_1 = \dfrac{\partial F_1}{\partial u_1}du_1 + \ldots\ldots + \dfrac{\partial F_1}{\partial u_n}du_n \\ dx_2 = \dfrac{\partial F_2}{\partial u_1}du_1 + \ldots\ldots + \dfrac{\partial F_2}{\partial u_n}du_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ dx_n = \dfrac{\partial F_n}{\partial u_1}du_1 + \ldots\ldots + \dfrac{\partial F_n}{\partial u_n}du_n \end{cases}$$

där vi antaga funktionaldeterminanten

$$\left| \frac{\partial F_i}{\partial u_k} \right| \neq 0 \quad (i,\ k = 1\ .\ 2\ \ldots\ldots\ n)\ .$$

Koefficienterna $\dfrac{\partial F_i}{\partial u_k}$ äro $2n$-periodiska funktioner, hvilka vi antaga hafva det primitiva periodsystemet (α) och som uppfylla de uppställda villkoren.

Men nu är ju äfven x en $2n$-periodisk funktion, med det primitiva periodsystemet (α).

Då kan ju hvarje funktion af rationel karakter, således äfven $\dfrac{\partial F_i}{\partial u_k}$, rationellt uttryckas i x, $x_1 \ldots\ldots x_n$, mellan hvilka består en algebraisk likhet, nämligen den som definieras af bilden (1).

Om ekvationerna lösas med afseende på $du_1 \ldots\ldots du_n$ så erhålles:

$$(4)\quad \begin{cases} du_1 = P_{11}dx_1 + P_{12}dx_2 + \ldots\ldots + P_{1,n}dx_n \\ du_2 = P_{21}dx_1 + P_{22}dx_2 + \ldots\ldots + P_{2,n}dx_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ du_n = P_{n1}dx_1 + P_{n2}dx_2 + \ldots\ldots + P_{n,n}dx_n \end{cases}$$

där således $P_{i,k}$ äro *rationella* funktioner af x, $x_1 \ldots\ldots x_n$ och där $| P_{ik} | \neq 0$ $(i,\ k = 1\ .\ 2\ \ldots\ldots\ n)$.

Integreras systemet (4) öfver en liniär varietet definierad genom

$$x_1 = \varphi_1(\lambda)$$
$$x_2 = \varphi_2(\lambda)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = \varphi_n(\lambda)$$

så erhålles följande system af kurviliniära integraler till algebraiska bilden (1)

$$(5)\quad \begin{cases} u_1 = \int P_{11}dx_1 + P_{12}dx_2 + \ldots\ldots + P_{1,n}dx_n \\ u_2 = \int P_{21}dx_1 + P_{22}dx_2 + \ldots\ldots + P_{2,n}dx_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n = \int P_{n1}dx_1 + P_{n2}dx_2 + \ldots\ldots + P_{n,n}dx_n \end{cases}$$

där integrabilitetsvillkoren:

$$\frac{\partial P_{ik}}{\partial x_l} - \frac{\partial P_{il}}{\partial x_k} = 0 \quad i\,,\ k\,,\ l = 1\,.\,2\,\ldots\ldots\,n\ \ (k < l)$$

äro uppfyllda.

Vi skola nu undersöka villkoret för att integralerna (5) skola vara af första slaget.

Enligt Kobbs undersökningar (loc. cit.) kan, som förut nämnts, omgifningen till hvarje ställe framställas genom ett ändligt antal vanliga potensserier af variablerna $t_1 \ldots\ldots t_n$. Införes nu i ekvationerna (5) variablerna $t_1 \ldots\ldots t_n$ i stället för $x\,,\ x_1 \ldots\ldots x_n$, så inses att det nödvändiga och tillräckliga villkoret, för att integralerna $u_1\,,\ u_2 \ldots\ldots u_n$ skola vara af första slaget, är att alla P_{ik} äro potensserier (vanliga eller algebraiska), som äro holomorfa i omgifningen till stället $t_1 = t_2 = \ldots\ldots = t_n = 0$.

Vi skola nu visa, att integralerna $u_1 \ldots\ldots u_n$ äro liniärt oberoende.

Antag nämligen existensen af en relation

$$\sum_i C_i \int \sum P_{ik} dx_i = 0$$

där C_i äro konstanter, så är

$$(C_1 P_{11} + C_2 P_{21} + \ldots\ldots + C_n P_{n1}) dx_1 + \ldots\ldots +$$
$$+ (C_1 P_{1n} + C_2 P_{2n} + \ldots\ldots\ldots + C_n P_{n,n}) dx_n = 0$$

hvaraf med nödvändighet följer, emedan $x_1 \ldots\ldots x_n$ äro af hvarandra oberoende:

$$C_1 P_{11} + C_2 P_{12} + \ldots\ldots + C_n P_{n1} = 0$$
$$C_1 P_{12} + C_2 P_{22} + \ldots\ldots + C_n P_{n2} = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$C_1 P_{1n} + C_2 P_{2n} + \ldots\ldots + C_n P_{nn} = 0$$

hvilket system, på grund af att determinanten

$$| P_{ik} | \neq 0$$

ej kan satisfieras af andra än nollvärden på $C_1, C_2 \ldots\ldots C_n$. Således äro integralerna liniärt oberoende.

Nu återstår att visa, att det finnes n och endast n kurviliniära integraler af första slaget.

Antag nämligen existensen af en $(n+1)^{\text{sta}}$ sådan integral

$U_{n+1} = \int (P_{n+1,1} dx_1 + P_{n+2,2} dx_2 + \ldots\ldots\ldots + P_{n+1,n} dx_n$ där $P_{n+1,k}$ äro rationella funktioner af x, x_1, $x_2 \ldots\ldots x_n$ och där integrabilitetsvillkoren äro uppfyllda.

På grund af (3) kan U_{n+1} då skrifvas under formen

$$U_{n+1} = \int \left(P_{n+1,1} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} + \ldots\ldots + P_{n+1,1} \frac{\partial F_n}{\partial u_1} \right) du_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots +$$
$$+ \int \left(P_{n+1,n} \frac{\partial F_1}{\partial u_n} + \ldots\ldots + P_{n+1,n} \frac{\partial F_n}{\partial u_n} \right) du_n$$

För att U_{n+1} skall vara af första slaget skall den ju vara ändlig i omgifningen af hvarje ställe $(a, a_1, \ldots a_n)$ inom algebraiska bilden (1) d. v. s. koefficienterna till $du_1 \ldots du_n$ måste konvergera i omgifningen till hvarje ställe $(u_1^0 \ldots u_n^0)$ eller m. a. o. vara hela funktioner af $u_1 \ldots u_n$, men från teorien för de $2n$-periodiska funktionerna känna vi en sats, analog med Liouvilles för de dubbelperiodiska funktionerna, att en hel $2n$-periodisk funktion reducerar sig till en konstant.

Således få vi:

$$U_{n+1} = \int c_1 du_1 + c_2 du_n + \ldots\ldots + c_n du_n$$

där $c_1, c_2 \ldots c_n$ äro konstanter

eller $U_{n+1} = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots + c_n u_n$

Denna relation visar således existensen af n liniärt oberoende kurvilinära integraler tillhörande algebraiska bilden (1), och att hvarje annan kurvilinär integral af första slaget till bilden kan framställas såsom en liniär relation af dessa med konstanta koefficienter.

Genom successiva kombinationer af integralerna $u_1, u_2 \ldots u_n$ är det nu enligt satsen[1] af Grönwall, alltid möjligt att genom vissa föreskrifter om funktionerna P, hvilkas explicita uttryck äro i det föregående framställda, bilda ett antal μ-faldiga integraler af första slaget till bilden (1) (μ helt $\leq n$) Låt en af dessa vara

$$(6)\quad U_\mu = \int\int \ldots\ldots \int \sum^{(n)} X_{\alpha_\mu \ldots \alpha_\mu} dx_{\alpha_1} \ldots dx_{\alpha_\mu}$$

där såsom förut $X_{\alpha_1 \ldots \alpha_\mu}$ äro rationella funktioner af $x, x_1 \ldots x_n$ och $\alpha_1 \ldots \alpha_\mu$ under förutsättningen $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots\ldots < \alpha_\mu$ genomlöpa talen $1 . 2 \ldots\ldots n$.

[1] Pag. 15.

Om vi genom den parametriska representationen

$$x_\nu = \varphi_\nu(\lambda_1 \ldots \lambda_\mu) \quad (\nu = 1 . 2 \ldots n)$$

definiera integrationsvarieteten, så definieras ju (6) genom

$$U_\mu = \int\int \ldots \int^{(\mu)} \left\{ \Sigma X_{\alpha_1 \ldots \alpha_\mu} \frac{\partial(x_{\alpha_1}, \ldots x_{\alpha_\mu})}{\partial(\lambda_1, \ldots \lambda_\mu)} \right\} d\lambda_1 \ldots d\lambda_\mu$$

där vi antaga som förut integrabilitetsvillkoren uppfyllda, så att integralens värde blir oförändradt, om nya variabler införas.

Utför jag då en variabeltransformation genom ekvationerna (2)

$$x = F(u_1 \ldots u_n)$$
$$x_i = F_i(u_1 \ldots u_n) \quad i = 1 . 2 \ldots n$$

så öfvergår (6) till

$$(7) \quad \int\int \ldots \int^{(\mu)} \Sigma Y_{\beta_1 \ldots \beta_\mu} du_{\beta_1} \ldots du_{\beta_\mu}$$

som definieras genom

$$\int\int \ldots \int^{(\mu)} \left\{ \Sigma Y_{\beta_1 \ldots \beta_\mu} \frac{\partial(u_{\beta_1} \ldots u_{\beta_\mu})}{\partial(\lambda_1 \ldots \lambda_\mu)} \right\} d\lambda_1 \ldots d\lambda_\mu$$

Emedan integralens värde blir oförändradt få vi:

$$\Sigma Y_{\beta_1 \ldots \beta_\mu} \frac{\partial(u_{\beta_1} \ldots u_{\beta_\mu})}{\partial(\lambda_1 \ldots \lambda_\mu)} = \Sigma X_{\alpha_1 \ldots \alpha_\mu} \frac{\partial(x_{\alpha_1} \ldots x_{\alpha_\mu})}{\partial(\lambda_1 \ldots \lambda_\mu)}$$

hvilken likhet på grund af den bekanta determinantsatsen:

$$\frac{\partial(x_{\alpha_1} \ldots x_{\alpha_\mu})}{\partial(\lambda_1 \ldots \lambda_\mu)} = \Sigma' \frac{\partial(x_{\alpha_1} \ldots x_{\alpha_\mu})}{\partial(u_{\alpha_1} \ldots u_{\beta_\mu})} \cdot \frac{\partial(u_{\beta_1} \ldots u_{\beta_\mu})}{\partial(\lambda_1 \ldots \lambda_\mu)}$$

öfvergår till

$$Y_{\beta_1 \ldots \beta_\mu} = \Sigma' \left\{ X_{\alpha_1 \ldots \alpha_\mu} \frac{\partial(x_{\alpha_1} \ldots x_{\alpha_\mu})}{\partial(u_{\beta_1} \ldots u_{\beta_\mu})} \right\} .$$

Enär integralen (7) är af första slaget, är $Y_{\beta_1 \dots \beta_\mu}$ ändlig i omgifningen af hvarje ställe till algebraiska bilden (1) och måste således vara en hel funktion af $u_1 u_2 \dots u_n$.

Men $X_{\alpha_1 \dots \alpha_\mu} \frac{\partial(x_{\alpha_1} \dots x_{\alpha_\mu})}{\partial(u_{\beta_1} \dots u_{\beta_\mu})}$ äro $2n$-periodiska funktioner af $u_1 \dots u_n$. Följaktligen äro $Y_{\beta_1 \dots \beta_\mu}$ konstanter.

Integralen (7) kan då skrifvas under formen:

$$U_n = \Sigma C_{\beta_1 \dots \beta_\mu} V_{\beta_1 \dots \beta_\mu}$$

där $C_{\beta_1 \dots \beta_\mu}$ äro konstanter och där

$$V_{\beta_1 \dots \beta_\mu} = \int\int \dots \int^{(\mu)} du_{\beta_1} \dots du_{\beta_\mu}.$$

Sätter jag nu speciellt $\mu = n$, så försvinner ju under förutsättningen $\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_n$ summationstecknet och U_n kan skrifvas under formen:

$$U_n = C_{1, 2 \dots n} V_{1, 2 \dots n}$$

Nu inses omedelbart, att U_n är den enda n-faldiga integral, som existerar till min algebraiska bild.

Ty antag existensen af en annan integral $\overline{U}_n$

$$\overline{U}_n = \overline{C}_{1, 2 \dots n} V_{1, 2 \dots n}$$

hvaraf

$$\overline{U}_n = C U_n \quad (C \text{ en konstant})$$

$\overline{U}_n$ och U_n äro således ej liniärt oberoende.

Vi kunna således uttala följande sats:

Till den algebraiska bilden $f(x, x_1, \dots x_n) = 0$ *existerar under förutsättning att* $x, x_1, \dots x_n$ *kunna uttryckas genom* $2n$*-periodiska funktioner af* n *parametrar, endast en* n*-faldig multipelintegral af första slaget.*

Jag skall nu visa, *att den liniära konnexionsordningen hos den klass af algebraiska bilder, hvilkas koordinater kunna uttryckas genom 2n-periodiska funktioner af n-parametrar är* $n + 1$.

Betrakta de till bilden (1) hörande n kurvilinära fundamentalintegralerna $u_1, u_2, \ldots\ldots u_n$ af första slaget, tagna längs $p_1 - 1$ slutna kurvor, som ej genom analytiska fortsättningar kunna öfvergå i hvarandra och ej genom kontinuerlig deformation reduceras till punkter, ej heller bilda fullständig begränsning till en yta, och som dessutom äro så beskaffade, att det är möjligt att till dessa $p_1 - 1$ kurvor tillordna en p_1^{te} kurva, som tillsammans med de förra bilda fullständig begränsning.

Integralernas värden längs dessa $p_1 - 1$ kurvor äro då deras perioder, som vi för u_i beteckna med $\omega_{ik} (i = 1 . 2 \ldots\ldots n ; k = 1 . 2 \ldots\ldots p_1 - 1)$.

Hvarje annan kurvilinär integral U kan då skrifvas:

$$U = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots\ldots + c_n u_n$$

där c äro konstanter.

Om perioderna till U betecknas med Ω_1, Ω_2, $\ldots\ldots \Omega_{p_1 - 1}$ så erhålles det liniära ekvationssystemet:

$$(8) \quad \begin{cases} \Omega_1 = c_1 \omega_{11} + c_2 \omega_{21} + \ldots\ldots\ldots c_n \omega_{n1} \\ \Omega_2 = c_1 \omega_{12} + c_2 \omega_{22} + \ldots\ldots\ldots c_n \omega_{n2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Omega_{p_1 - 1} = c_1 \omega_{1, p_1 - 1} + c_2 \omega_{2 p_1 - 1} + \ldots + c_n \omega_{n, p_1 - 1} \end{cases}$$

där determinanterna i matrixen

$$\left\| \begin{matrix} \omega_{11}, & \omega_{21} & \ldots\ldots\ldots & \omega_{n1} \\ \omega_{12}, & \omega_{22} & \ldots\ldots\ldots & \omega_{n2} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \omega_{1, p_1 - 1}, & \omega_{2, p_1 - 1} & \ldots\ldots & \omega_{n, p_1 - 1} \end{matrix} \right\|$$

ej alla samtidigt försvinna.

Nu inses lätt att $p_1 - 1 \leq n$, ty om $p_1 - 1$ vore $> n$ skulle detta på grund af ofvanstående ekvationssystem (8) medföra en liniär homogen relation mellan perioderna Ω_1, Ω_2, ... Ω_{p_1-1} med konstanta koefficienter, som ej alla äro noll, hvilket är omöjligt, enär perioderna $\Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_{p_1-1}$ äro liniärt oberoende.

Vidare hafva vi

$$U = k_1\Omega_1 + k_2\Omega_2 + \ldots\ldots + k_{p_1-1}\Omega_{p_1-1}$$

eller på grund af (8)

$$\begin{aligned} U = {} & c_1(k_1\omega_{11} + k_2\omega_{12} + \ldots\ldots + k_{p_1-1}\omega_{1,p_1-1}) + \\ & + c_2(k_1\omega_{21} + k_2\omega_{22} + \ldots\ldots + k_{p_1-1}\omega_{2,p_1-1}) + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + c_n(k_1\omega_{n_1} + k_2\omega_{n_2} + \ldots\ldots + k_{p_1-1}\omega_{n,p_1-1}) \end{aligned}$$

Emedan u_i kunna skrifvas som liniära relationer af ω_{ik} med konstanta koefficienter, måste följande ekvationssystem gälla:

$$\begin{aligned} u_1 &= k_1\omega_{11} + k_2\omega_{12} + \ldots\ldots + k_{p_1-1}\omega_{1,p_1-1} \\ u_2 &= k_1\omega_{21} + k_2\omega_{22} + \ldots\ldots + k_{p_1-1}\omega_{2,p_1-1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n &= k_1\omega_{n_1} + k_2\omega_{n_2} + \ldots\ldots\ldots + k_{p_1-1}\omega_{n,p_1-1} \end{aligned}$$

På grund af att u_1, u_2 ..... u_n äro liniärt oberoende, inses genom samma resonnemang som nyss, att

$$p_1 - 1 \geq n$$

hvaraf följer på grund af det föregående att

$$p_1 - 1 = n$$

eller $p_1 = n + 1$.

Den klass af algebraiska bilder, vi nu betraktat, karakteriseras således af existensen af kurviliniära integraler af första slaget, som tillhöra densamma. Detta har man all anledning att antaga ej är fallet för hvarje algebraisk bild, i all synnerhet, som PICARD [1] visat att en algebraisk yta i allmänhet *saknar* kurvilinära integraler af första slaget och under en synnerligen elegant form uppställt de nödvändiga och tillräckliga villkoren för existensen af sådana.

En fråga, som står i mycket intimt sammanhang med frågan om antalet integraler tillhörande en algebraisk bild är undersökningen af de algebraiska bilder, som genom en birationell transformationsgrupp, innehållande n väsentliga parametrar, så beskaffad att den identiska transformationen innehålles i gruppen på ett regulärt sätt för vissa fixa värden på parametrarne, kunna transformeras i sig själfva.

Många grunder tala för existensen af satser analoga med dem som visats af SCHWARZ och PICARD [2] för algebraiska bilder af en och två variabler, ehuru jag ej lyckats genomföra något strängt bevis härför. Ett sådant bevis bör naturligtvis grunda sig på en undersökning i allmänhet af antalet integraler af första slaget tillhörande en algebraisk bild, hvilken undersökning fordrar hjälpmedel, som jag ännu ej lyckats finna.

---

[1] Journal de Mathématiques 1889 eller PICARD et SIMART pag. 111 och ff.

[2] Pag. 19.